1) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas:

O(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Ω(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Θ(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c1, c2 ∈ R+, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

a) (½)n2 − 3n ∈ Θ(n2).

Definimos a h(n) como:

h(n)=(½)n2 − 3n

Entonces, podemos traducir el enunciado como:

h(n) ∈ Θ(n2)

ahora aplicando propiedades nos damos cuenta que esto es equivalente a:

h(n) ∈ O(n2) ∩ Ω(n2)

Para que esto sea cierto debemos demostrar que:

1. h(n) ∈ O(n2)

Se acepta que h(n) ∈ O(f(n)) sii ∃ c ∈ R+ , n0 ∈ N tq h(n) ≤ c f(n); n ≥ n0

Con h(n)=(½)n2 − 3n

Sabemos que h(n) ≤ c f(n); n ≥ n0 , se dará si 3n ≤ (½)n2

si elegimos n0=3 esto no se cumpliria, ya que existiria seria falso para n=3 que 3n ≤ (½)n2

ya que sería lo mismo que decir que 9 ≤ 4.5 lo cual evidentemente es falso.

Ahora bien, si n0=5 se cumple, ya que para n=6 sería equivalente a decir que 18 ≤ 18,

y a medida que n cresca (½)n2 crecera de manera exponencial, mientras que 3n crecera de forma lineal asi que para n ≥ 6 sera cierto que 3n ≤ (½)n2 .

Asi que hallamos n0=5 y c=1 tal que se cumplen las condiciones.

¿Siempre se cumple que h(n) ≤ c f(n); n ≥ n0?

Es equivalente a decir que:

(½)n2 − 3n ≤ 1\*n2; n ≥ 6

Lo cual es evidentemente cierto, n2 crecerá con n de forma normal, mientras que (½)n2 − 3n siempre valdrá la mitad que n2 además de que se le restara 3n.

.: h(n) ∈ O(n2)

1. h(n) ∈ Ω(n2)

Recordamos que Ω(n2) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c n2, n ≥ n0}

nos preguntamos ¿h(n) ∈ Ω(n2)? con h(n)=(½)n2 − 3n.

La respuesta es si, con c=0,01 y n0=8

.: h(n) ∈ Ω(n2)

.:h(n) ∈ Θ(n2)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>

b) n3 ∈ O(n2).

Aprovecharemos la regla del límite.

limn->inf n2/n3=limn->inf 1/n=0

Por lo tanto por regla del límite tenemos que n2 ∈ O(n3) y n3 ∉ O(n2)

.: Es falso que n3 ∈ O(n2)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

c) n2 ∈ Ω(n3).

Aprovecharemos la regla del límite.

limn->inf n2/n3=limn->inf 1/n=0

Por lo tanto por regla del límite tenemos que n2 ∈ O(n3) y n2 ∉ Θ(n3), considerando las propiedades vistas en la teoria esto implica que n2 ∉ Ω(n3)

.: Es falso que n2 ∈ Ω(n3)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

d) 2n ∈ Θ(2n+1).

limn->inf 2n/2n+1=limn->inf 2n/(2n \* 21)=1/(1 \* 21)=limn->inf 1/2=0.5

0.5 ∈ R+

Por lo tanto por regla del límite tenemos que 2n ∈ Θ(2n+1)

.: Es falso que 2n ∈ Θ(2n+1)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

e) n! ∈ O((n + 1)!).

limn->inf n!/(n+1)!=limn->inf n!/(n!\*(n+1))=limn->inf 1/(1\*(n+1))=limn->inf 1/(n+1)=0

0.5 ∈ R+

Por lo tanto por regla del límite tenemos que n! ∈ O((n + 1)!) y n! ∉ Θ((n + 1)!))

.: Es cierto que n! ∈ O((n + 1)!)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

f) f : N → IR≥0, f(n) ∈ O(n) ⇒ [f(n)]2 ∈ O(n2).

Si f(n) ∈ O(n) eso implica que limn->inf f(n)/n=0 o limn->inf f(n)/n ∈ R+.

Sabemos que limn->inf [f(n)]2/n2 equivale a limn->inf [f(n)/n]2 al aplicar la propiedad distributiva de la potencia en la división. ahora realizaremos el límite, nos quedaría [0]2 o [m]2, m ∈ R+ en el primer caso [0]2=0 y en el segundo [m]2=w , m,w ∈ R+.

La regla del limite nos dice entonces que [f(n)]2 ∈ O(n2) en ambos casos.

.: Tendríamos que f : N → IR≥0, f(n) ∈ O(n) ⇒ [f(n)]2 ∈ O(n2)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

g) f : N → IR≥0, f(n) ∈ O(n) ⇒ 2f(n) ∈ O(2n).

Si f(n) ∈ O(n) eso implica que limn->inf f(n)/n=0 o limn->inf f(x)/n ∈ R+.

Sabemos que limn->inf 2f(n)/2n. Si ahora realizaremos el límite, nos quedaría 20/2inf o 2m/2inf, m ∈ R+ (un numero elevado al infinito da infinito si el numero es mayor a 1, y 0 se es menor a 1, si es 1 nos da indeterminado) en el primer caso 20/2inf=1/inf=0 y en el segundo 2m/2inf=w/inf=0, m,w ∈ R+.

La regla del límite nos dice entonces que 2f(n) ∈ O(2n) en ambos casos.

.: Tendríamos que N → IR≥0, f(n) ∈ O(n) ⇒ 2f(n) ∈ O(2n)

Me ayude de la siguiente página para graficar las funciones y revisar que lo que digo es cierto:

* <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es-AR>
* <https://es.symbolab.com/solver/limit-calculator/%5Clim_%7Bx%5Cto%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%5Cright)>

h) f : N → IR≥0 y k ∈ IR≥0, k\*f(n) ∈ O(f(n)).

Esto se demuestra solo…

O(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

k\*f(n) ∈ O(f(n)) si y sólo si existe c y n0 tal que k\*f(n) ≤ c f(n), n ≥ n0.

si definimos c=k entonces independienteme de n0 tendríamos que k\*f(n) ≤ c f(n) es equivalente a k\*f(n) ≤ k\*f(n), es evidente que k\*f(n) ≤ k\*f(n) es una proposición válida, ya que podemos afirmar que k\*f(n) = k\*f(n).

.: Es cierto que f : N → IR≥0 y k ∈ IR≥0, k\*f(n) ∈ O(f(n))

i) Para todo polinomio p(n) de grado m, p(n) ∈ O(nm).

limn->inf p(n)/nm=limn->inf wnm+g(n)/nm, g(n) de grado menor a m, si sacamos factor común, lo máximo que podremos obtener será limn->inf nm-1(wn+...+q)/nm, simplificando nos quedamos con limn->inf(wn+...+q)/n, aplicando distributiva queda lim n->infwn/n+...+q/n, que es equivalente a limn->infw+...+q/n, remplazando es w+...+q/inf que es equivalente a w+...+0, lo que es w, w ∈ R+.

Con la regla del límite tendremos que p(n) ∈ O(nm).

.: Para todo polinomio p(n) de grado m, p(n) ∈ O(nm)

j) α, β ∈ IR, α < β ⇒ nα ∈ O(nβ).

Esto es evidente…

O(nβ) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c\*nβ, n ≥ n0}

nα ∈ O(nβ) si y sólo si existe c y n0 tal que nα ≤ c\*nβ, n ≥ n0.

No hay que ir muy lejos, con c=1 y para n0=0 esto se cumple, ya que nβ = nq+α, q ∈ N, sabemos que nα ≤ nq+α ≤ nβ, con el propiedad de transitividad tenemos que nα ≤ nβ, con c=1 diriamos nα ≤ 1\*nβ, lo cual viene a ser lo mismo.

.: α, β ∈ IR, α < β ⇒ nα ∈ O(nβ)

2) Probar que se cumplen las siguientes propiedades para f, g, h : N → IR≥0.

O(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Ω(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c ∈ R+, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Θ(f(n)) = {t:N → R+ / ∃ c1, c2 ∈ R+, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

Todas estas definiciones también se aplican a N → IR≥0 ya que así eran originalmente, nosotros usamos solo N → R+ ya que en el contexto de computabilidad y complejidad tiene un mayor sentido.

Nos quedarian asi:

O(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Ω(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Θ(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

Simplemente hacemos que sea “menos preciso”.

Reflexividad:

a) f(n) ∈ O(f(n))

O(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Entonces; ¿Existe n0 y c tal que f(n) ≤ c f(n)?

Evidentemente si, con n0=0 y c=1 tendremos f(n) ≤ f(n) lo cual evidentemente es cierto ya que f(n)=f(n).

.: f(n) ∈ O(f(n))

b) f(n) ∈ Θ(f(n))

Θ(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

Entonces; ¿Existe n0 y c tal que c1f(n) ≤ f(n) ≤ c2f(n), n ≥ n0?

Evidentemente si, con n0=0 y c1=1 y c2=1 tendremos 1\*f(n) ≤ f(n) ≤ 1\*f(n) lo cual evidentemente es cierto ya que f(n)=f(n).

.: f(n) ∈ Θ(f(n))

c) f(n) ∈ Ω(f(n))

Ω(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Entonces; ¿Existe n0 y c tal que t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0?

Evidentemente si, con n0=0 y c1=1 y c2=1 tendremos f(n) ≤ 1\*f(n) lo cual evidentemente es cierto ya que f(n)=f(n).

.: f(n) ∈ Ω(f(n))

Transitividad:

d) Si f(n) ∈ O(g(n)) y g(n) ∈ O(h(n)) ⇒ f(n) ∈ O(h(n))

O(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Por el antecedente deducimos que:

* Existe n0 y c tal que f(n) ≤ c\*g(n), n ≥ n0.
* Existe n0 y c tal que g(n) ≤ c\*h(n), n ≥ n0.

Recordando inecuaciones podemos deducir lo siguiente:

* f(n) ≤ c\*g(n) <-> f(n)/c ≤ g(n) //Nótese que tendríamos problemas si c=0

Con esto podemos deducir que:

* Como f(n)/c ≤ g(n) y g(n) ≤ c\*h(n) debido a la transitividad del símbolo “≤” entonces tenemos que f(n)/c ≤ c\*h(n)

Si usamos inecuaciones en lo anterior tenemos:

* f(n) ≤ c2\*h(n), c2 ∈ R≥0.

.: Si f(n) ∈ O(g(n)) y g(n) ∈ O(h(n)) ⇒ f(n) ∈ O(h(n)), no sabría qué pasa cuando c=0

e) Si f(n) ∈ Θ(g(n)) y g(n) ∈ Θ(h(n)) ⇒ f(n) ∈ Θ(h(n))

Θ(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

Deducimos lo siguiente:

* ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 g(n) ≤ f(n) ≤ c2 g(n), n ≥ n0.
* ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 h(n) ≤ g(n) ≤ c2 h(n), n ≥ n0.

Con esto podemos concluir que:

* ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 h(n) ≤ f(n) ≤ c2 h(n), n ≥ n0.

Ya que se cumple que c1c3h(n) ≤ c1g(n) ≤ f(n) ≤ c2g(n) ≤ c2c4h(n), c1, c2, c3, c4 ∈ R≥0, n ≥ n0.

Aprobechando la propiedad de transitividad del simbolo “≤”, asi que llegamos a que:

c1c3h(n) ≤ f(n) ≤ c2c4h(n), c1, c2, c3, c4 ∈ R≥0, n ≥ n0.

Lo que podemos expresar así:

c5h(n) ≤ f(n) ≤ c6h(n), c5, c6 ∈ R≥0, n ≥ n0.

f) Si f(n) ∈ Ω(g(n)) y g(n) ∈ Ω(h(n)) ⇒ f(n) ∈ Ω(h(n))

Ω(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Deducimos lo siguiente:

* ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq f(n) ≥ c g(n), n ≥ n0.
* ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq g(n) ≥ c h(n), n ≥ n0.

Con esto podemos concluir que:

* ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq f(n) ≥ c h(n), n ≥ n0.

¿Cómo? Pues siguiendo la siguiente explicación:

1. sabemos que f(n) ≥ c1 g(n).
2. ¿c1 g(n) ≥ c2 h(n)?

Evidentemente si, ya que sabemos que ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq g(n) ≥ c h(n), n ≥ n0, si multiplicamos ambos lados por c1 tendremos que c1 g(n) ≥ c c1 h(n), lo cual podemos expresar como c1 g(n) ≥ c2 h(n), por ende seguimos cumpliendo con la definicion de Ω.

1. Por Modus ponens entre 1 y 2 concluimos que f(n) ≥ c2 h(n), por ende llegamos a que

∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq f(n) ≥ c h(n), n ≥ n0. osea que f(n) ∈ Ω(h(n)).

.: Concluimos que Si f(n) ∈ Ω(g(n)) y g(n) ∈ Ω(h(n)) ⇒ f(n) ∈ Ω(h(n))

Simetría:

g) f(n) ∈ Θ(g(n)) ⇐⇒ g(n) ∈ Θ(f(n)).

Θ(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ t(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0}

Necesitamos demostrar 2 cosas para esto:

1. f(n) ∈ Θ(g(n)) ⇒ g(n) ∈ Θ(f(n)).
   1. si f(n) ∈ Θ(g(n))
   2. ⇒ ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 g(n) ≤ f(n) ≤ c2 g(n), n ≥ n0.
   3. ⇒ ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ g(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0.
   4. ⇒ g(n) ∈ Θ(f(n)).
2. g(n) ∈ Θ(f(n)) ⇒ f(n) ∈ Θ(g(n)) .
   1. si g(n) ∈ Θ(f(n))
   2. ⇒ ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 f(n) ≤ g(n) ≤ c2 f(n), n ≥ n0.
   3. ⇒ ∃ c1, c2 ∈ R≥0, n0 ∈ N tq c1 g(n) ≤ f(n) ≤ c2 g(n), n ≥ n0.
   4. ⇒ f(n) ∈ Θ(g(n)).

.: f(n) ∈ Θ(g(n)) ⇐⇒ g(n) ∈ Θ(f(n)).

h) Simetría traspuesta:

i) f(n) ∈ O(g(n)) ⇐⇒ g(n) ∈ Ω(f(n)).

O(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≤ c f(n), n ≥ n0}

Ω(f(n)) = {t:N → R≥0 / ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq t(n) ≥ c f(n), n ≥ n0}

Necesitamos demostrar 2 cosas para esto:

1. f(n) ∈ O(g(n)) ⇒ g(n) ∈ Ω(f(n)).
   1. Si f(n) ∈ O(g(n))
   2. ⇒ ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq f(n) ≤ c g(n), n ≥ n0.
   3. ⇒ ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq g(n) ≥ c f(n), n ≥ n0.
   4. ⇒ g(n) ∈ Ω(f(n)).
2. g(n) ∈ Ω(f(n)) ⇒ f(n) ∈ O(g(n)).
   1. Si g(n) ∈ Ω(f(n))
   2. ⇒ ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq g(n) ≥ c f(n), n ≥ n0.
   3. ⇒ ∃ c ∈ R≥0, n0 ∈ N tq f(n) ≤ c g(n), n ≥ n0.
   4. ⇒ f(n) ∈ O(g(n)).

.: f(n) ∈ O(g(n)) ⇐⇒ g(n) ∈ Ω(f(n)).